轉動慣量實驗

一、實驗目的

測量轉輪受力矩而產生的角速度及角加速度的大小，以驗證剛體繞固定轉軸轉動之下的牛頓運動定律及其他轉動的物理量。其方法主要由一外力矩使轉輪產生轉動在尤其產生的角速度或角加速度來求得其他轉動的物理量。

二、實驗原理

首先當一物體再繞著圓點 O 點作轉動，此轉動得在 t_1 時的角位置為 θ_1，在 t_2 時的位置為 θ_2 此時定義物體的平均角速度(average angular velocity)為

$$\bar{\omega}=\frac{\theta_2-\theta_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\text{單位角位移量}}{\text{單位時間}}$$

所以角速度我們可寫成:

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt}\qquad (\text{rad/s}\quad \text{or}\quad \text{rev/s})$$

同理，若再 t_1 時有角速度 ω_1，t_2 時有角速度 ω_2，則有平均角加速度(average angular acceleration)

$$\bar{\alpha}=\frac{\omega_2-\omega_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

所以角加速度可以寫成

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}\qquad (\text{rad}/s^2\quad \text{or}\quad \text{rev}/s^2)$$

而我們由動能是所有剛體的集合而來可得

$$K=\frac{1}{2}m_1v_1^{\ 2}+\frac{1}{2}m_2v_2^{\ 2}+\frac{1}{2}m_3v_3^{\ 2}+\ldots=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^{\ 2}$$

又由 $v=r\omega$，代入上式:

$$K=\sum_i\frac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2=\frac{1}{2}(\sum m_ir_i^{\ 2})\omega^2=\frac{1}{2}I\omega^2$$

在此，我們定義轉動慣量(moment of inertia) I

$$I=\sum_i m_ir_i^{\ 2}$$

單位一般為 $kg\cdot m^2$，若質點為連續體，則

$$I=\int r^2dm=\int\rho r^2dV\qquad (\text{其中 }\rho\text{ 表示密度})$$

由力矩

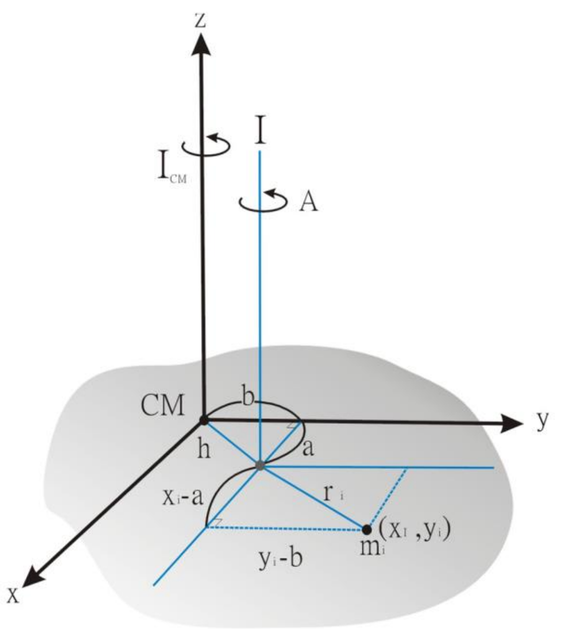
$$\tau = F_t r = m(\alpha r) r = (mr^2)\omega = I\alpha$$

補充：平行軸定理

若物體之總質量為 M，對通過質心之軸的轉動慣量為 I_{CM} ，而對另一平行軸的轉動慣量為 I，且兩軸相距 h，則:

$$\underline{I = I_{CM} + Mh^2}$$

證明:



如圖設轉軸方向為 z 軸方向，且以質心為座標圓點($x_{CM} = y_{CM} = 0$)，故質點 m_i 對 A 軸之轉動慣量為:

$$I_i = m_i r_i^2 = m_i[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2] = m_i(x_i^2 + y_i^2) + (a^2 + b^2)m_i - 2am_i x_i - 2bm_i y_i$$

$$\therefore I = \sum I_i = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) + (a^2 + b^2)\sum m_i - 2a\sum m_i x_i - 2b\sum m_i y_i$$

後二項為 0，∵由質心定義

$$\sum m_i x_i = Mx_{CM} = 0$$
$$\sum m_i y_i = My_{CM} = 0$$

且 $a^2 + b^2 = h^2$

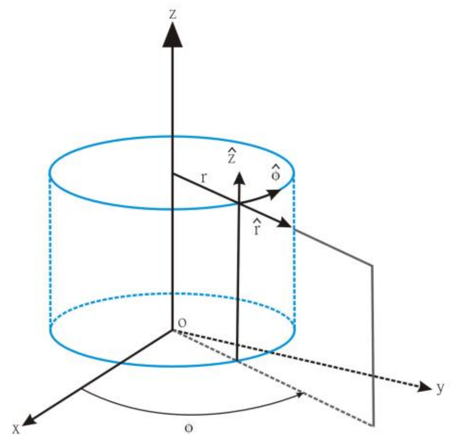
$$\therefore I = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) + (\sum m_i)h^2 = I_{CM} + Mh^2$$ Q.E.D

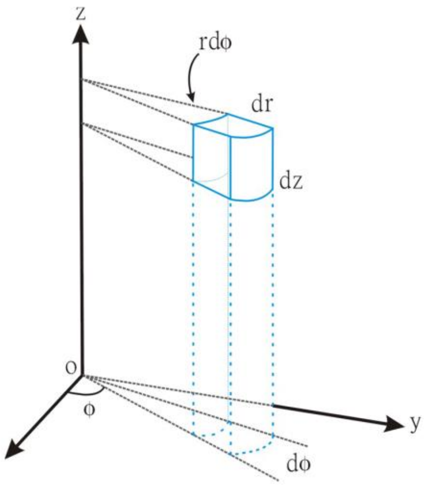
轉動慣量 I 的推導:

先補充計算轉動慣量所需要用到的座標關係，如下:

圓柱座標:

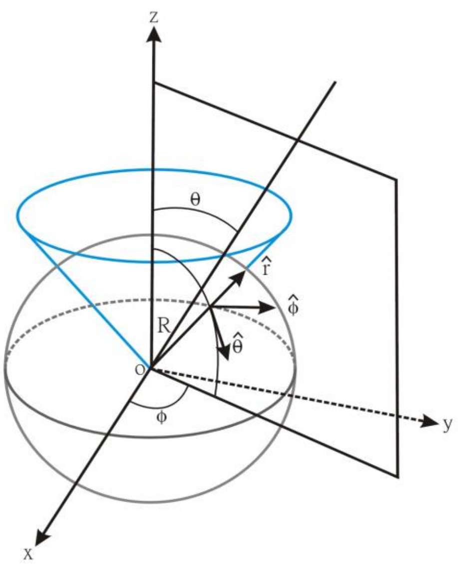
$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi \qquad z = z \qquad dv = r\,dr\,d\phi\,dz$$

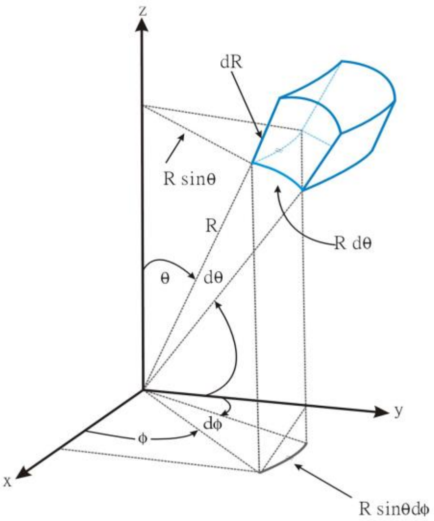




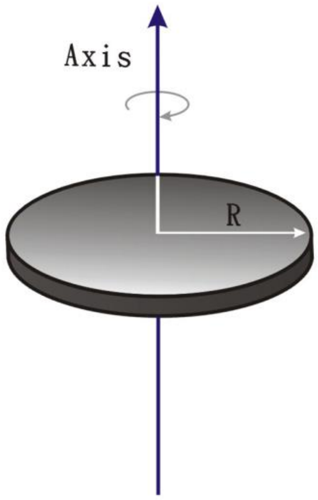
圓球座標:

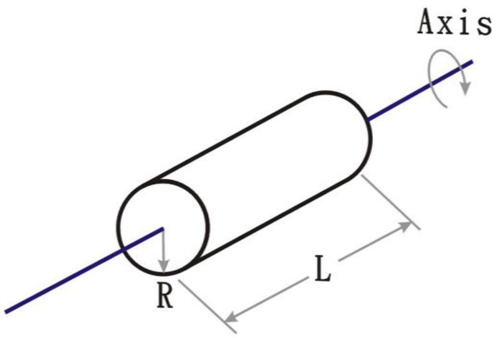
$$x = R\sin\theta\cos\phi \qquad y = R\sin\theta\sin\phi \qquad z = R\cos\theta \qquad dv = R^2\sin\theta\,dR\,d\phi\,d\theta$$





1. 圓盤或圓柱體: I=$\frac{1}{2}MR^2$





假設圓柱體的極小體積如上兩圖，所以

$$dv = rdrd\phi dz$$

假設體密度為 ρ ，所以 dm 為

$$dm = \rho dv = \rho rdrd\phi dz$$

所以

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dv = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^l dz = \rho \frac{R^4}{4}(2\pi)l = \frac{1}{2}\rho\pi l R^4$$

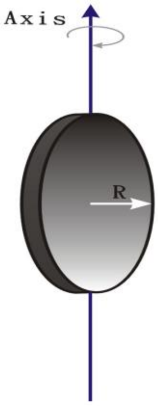
又

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 l}$$

所以:

$$I = \frac{1}{2}\rho\pi l R^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{\pi R^2 l}\right)\pi l R^4$$
$$= \frac{1}{2}MR^2$$

所以不管圓盤圓柱，I 皆跟柱體高無關。

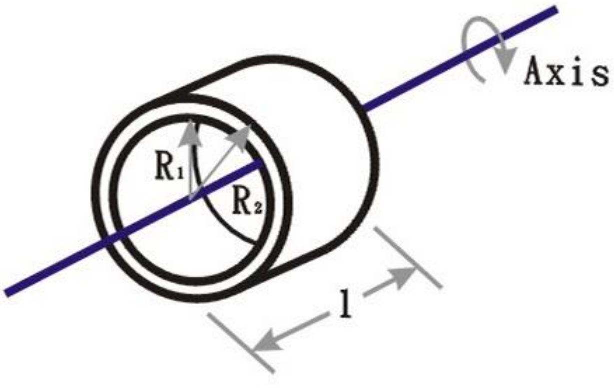


另外，假設如上圖，改變轉軸的位置則圓盤的轉動慣量為:

$$I=\int r^2dm=\int(r\sin\phi)^2\rho rdrd\phi dz=\rho\int_0^R r^3dr^3\int_0^{2\pi}\sin^2\phi d\phi\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}dz=\frac{M}{\pi R^2 d}\cdot\frac{R^4}{4}\cdot\pi\cdot d$$

$$=\frac{1}{4}MR^2$$

2. 環狀圓柱: I=$\frac{1}{2}M(R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2})$



同上之式子，假如積分式中 r 項的上下限改為:

$$I=\int r^2dm=\rho\int_{R_1}^{R_2}r^3dr\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^l dz=\frac{1}{2}\rho\pi l(R_2^{\ 4}-R_1^{\ 4})$$

又

$$\rho=\frac{M}{\pi(R_2^{\ 2}-R_1^{\ 2})l}$$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\frac{M}{\pi(R_2^{\ 2}-R_1^{\ 2})l}\pi l(R_2^{\ 4}-R_1^{\ 4})$$

又

$$\frac{(R_2^{\ 4}-R_1^{\ 4})}{(R_2^{\ 2}-R_1^{\ 2})} = \frac{(R_2^{\ 2}+R_1^{\ 2})(R_2^{\ 2}-R_1^{\ 2})}{(R_2^{\ 2}-R_1^{\ 2})}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}M(R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2})$$

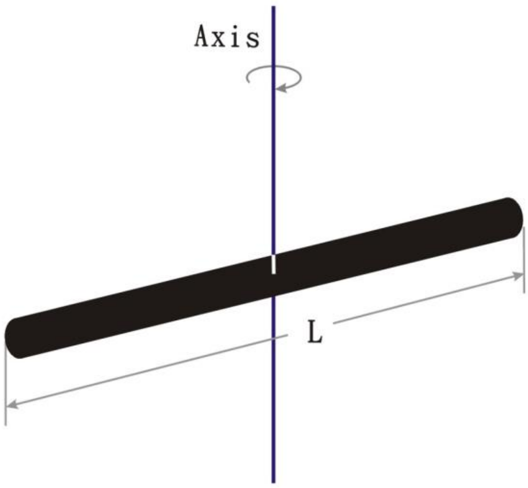
3.圓柱

(ｉ) 假設柱體半徑可以忽略且密度均勻。設 $\lambda = \frac{M}{L}$ 為柱體密度，假設棍子位於 x 處，則:

$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L}dx$$

$$I = \int x^2 dm = \int x^2 \lambda dx$$

又可因轉動的圓心位置(或轉軸的位置)而有不同的結果。

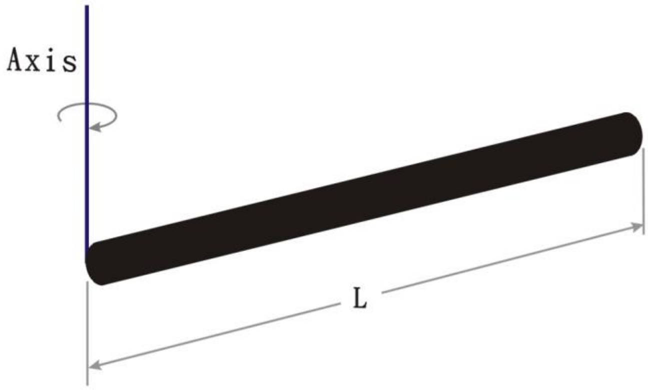


如在軸中心(如上圖):

$$I = \int x^2 dm = \int x^2 \lambda dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \lambda dx = 2\int_0^{\frac{L}{2}} x^2 \lambda dx = 2\frac{M}{L}\frac{(L/2)^3}{3}$$

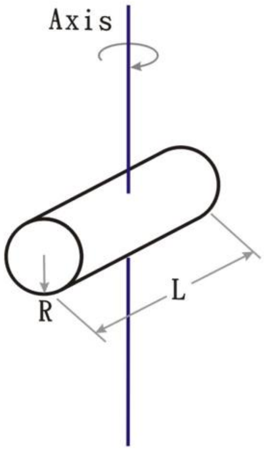
$$= \frac{1}{12}ML^2$$

如在邊端:



$$I=\int x^2dm=\int x^2\lambda dx=\int_0^L x^2\lambda dx=\frac{1}{3}L^3(\frac{M}{L})$$
$$=\frac{1}{3}ML^2$$

(ⅱ)假設柱體半徑不可忽略且密度均勻。在此我們僅討論在圓柱中心橫躺著轉動的情形。



我們將圓柱切成一片片極小的圓盤，且每片圓盤質量為 dm，我們以繞著圓盤的直徑為轉軸時，其轉動慣量在上面已算過，為 $I=\frac{1}{4}MR^2$ ，再由平行軸定理可知:

$$I=\int dI=\int d(I_{CM}+Mh^2)=\int dI_{CM}+\int dm\cdot dh^2$$

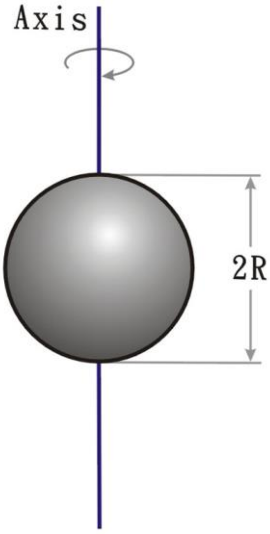
我們可由上圖得知 $I=I_{CM}=\frac{1}{4}MR^2$，而平行軸中的 $\int dm\cdot dh^2$ 項等於上面推導過的在軸中心的圓柱體(半徑忽略)的計算，所以:

$$I=\int dI_{CM}+\int dm\cdot dh^2=\int d(\frac{1}{4}MR^2)+\int x^2dm=\frac{1}{4}MR^2+\frac{1}{12}ML^2$$

其中 R 為圓柱半徑，L 為圓柱長度。

4. 球型體(分實心和空心)

(ｉ)實心球體



首先，先帶入球座標(r,θ,ϕ)的觀念，如上圖　，可知: $dv = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

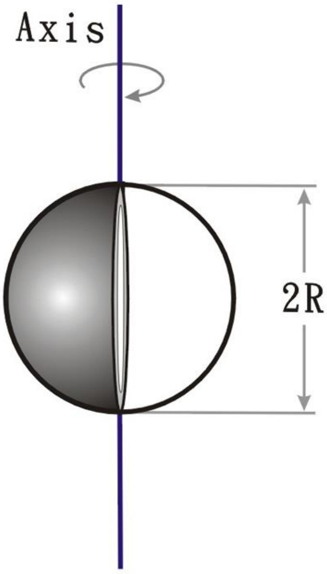
假設體密度為$\rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{\int dm}{\int dv} = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$，又 dm 與 z 軸的距離為$r\sin\theta$，所以:

$$I_z = \int (r\sin\theta)^2 dm = \iiint r^2\sin^2\theta\cdot\rho r^2\sin\theta dr d\theta d\phi = \rho\int_0^R r^4 dr\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \rho\cdot\frac{R^5}{5}\cdot 2\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{8}{15}\pi R^5$$

$$= \frac{2}{5}MR^2$$

(ⅱ)空心球殼



同上，在此我們假設其表面積密度為$\sigma=\dfrac{M}{S}=\dfrac{dm}{ds}=\dfrac{M}{4\pi R^2}$

$$I_z=\int(r\sin\theta)^2dm=\iint r^2\sin^2\theta\cdot\sigma R^2\sin\theta d\theta d\phi=\sigma R^4\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi$$
$$=\frac{M}{4\pi R^2}\cdot R^4\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\pi=\frac{2}{3}MR^2$$