

A01-433E-Y01

# 陀螺儀實驗(光電式)

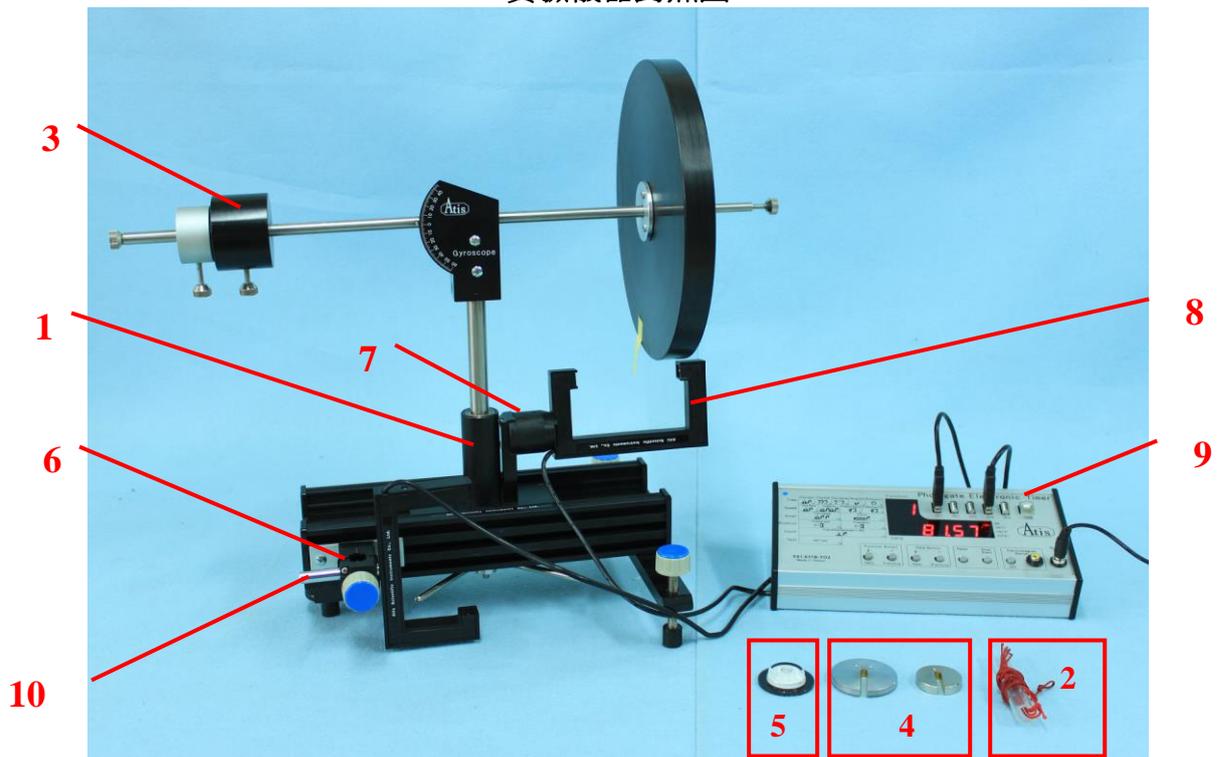
## 一、 實驗目的

瞭解角動量與力矩的關係，並且觀察陀螺儀的進動與章動現象，最後利用陀螺轉動與進動的角速度來求得陀螺的轉動慣量。

## 二、 實驗儀器

實驗儀器清單					
編號	名稱	數量	編號	名稱	數量
1	陀螺儀(三點式調整角、陀螺支軸及橫杆、角度器、陀螺轉盤)	1	2	附柄拉繩	1
3	平衡砝碼(900g、150g)	2	4	加重砝碼(100g、50g)	2
5	水平儀	1	6	固定接頭	1
7	光電閘磁性接頭	1	8	光電閘感測器	2
9	運動資料擷取器(附電源供應器 DC12V)	1	10	鐵柱(3.7cm*1)(6.7cm*1)	1

實驗儀器對照圖



### 三、 實驗原理

陀螺儀這種裝置，一直是航空和航海上航行判斷姿態及速率等最方便實用的參考儀錶。陀螺儀被用在飛機飛行儀錶的心臟地位，是由於它的兩個基本特性：一為定軸性（inertia or rigidity），另一是逆動性（precession），這兩種特性都是建立在角動量守恆的原則下所產生的。由牛頓第二運動定律的延伸可以得知：作用於一質點的力矩之總和，等於該質點的角動量之時間變動率。如下式所示：

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

而在本實驗中我們可以將陀螺，視為是許多質點組合而成，這些質點相互緊密的結合在一起，因此當陀螺轉動的時候，就如同這些質點一起轉動。所以我可以將此質點系統(陀螺)中的角動量改寫為：

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 + \dots + \vec{l}_m = \sum_{i=1}^m \vec{l}_i$$

而質點系統的淨外力矩  $\vec{\tau}$  可以改寫為：

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^m \frac{d\vec{l}_i}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

而陀螺的角動量  $\vec{L}$  又可以進一步被改寫為  $I\vec{\omega}$ ， $I$  是陀螺轉盤的轉動慣量為一純量， $\vec{\omega}$  為一個與角動量方向相同的向量。如圖 1 所示：

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = I\vec{\omega}$$

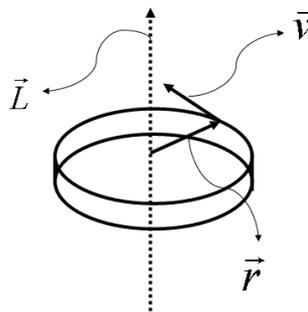
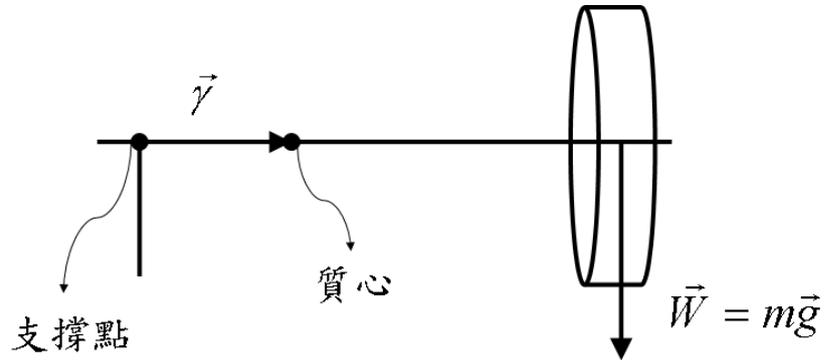


圖 1

瞭解以上轉動的基本特性後，可以開始討論陀螺儀的進動與章動現象，由圖 2 中，我們首先假設陀螺儀系統中的質心位置與支撐點距離  $\vec{r}$ ，而陀螺所受的重力為  $\vec{W} = m\vec{g}$ ；因此我可以發現此兩種參數將會對陀螺儀系統產生一淨力矩  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{W} = \vec{r} \times m\vec{g}$ 。相同的在圖 3 中，

陀螺儀的質心位置與支撐點位置相同時，陀螺所受的重力仍然為  $\vec{W} = m\vec{g}$ ，但是因為支撐點與質心位置相同  $\vec{r} = 0$ ，所以可以發現陀螺的重力對系統的淨力矩也為零。



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{W} = \vec{r} \times m\vec{g}$$

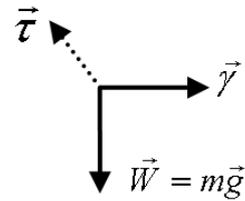
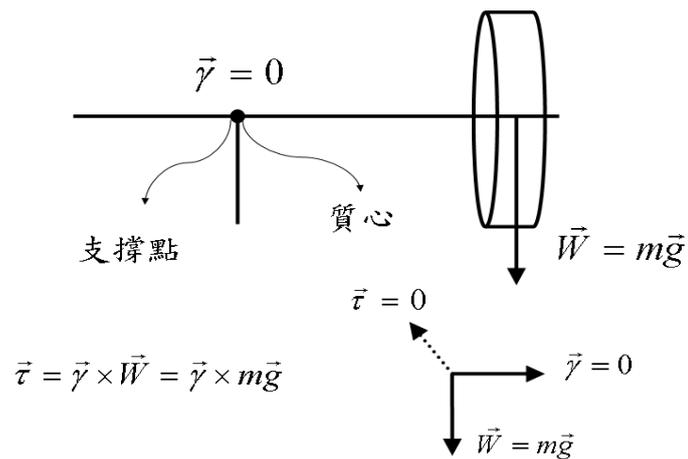


圖 2



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{W} = \vec{r} \times m\vec{g}$$

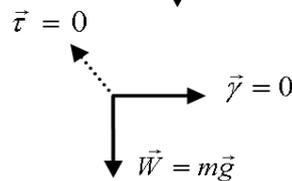


圖 3

我們統整上述的內容，可以清楚的得知陀螺儀系統中，陀螺重力所產生的淨力矩方向( $\vec{\tau}$ )

與陀螺角動量在單位時間內的改變量方向( $d\vec{L}$ )必須相同：

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{W} = \vec{r} \times m\vec{g}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}(t + \Delta t) - d\vec{L}(t)}{dt}$$

例如圖 4 所示。我們可以看到重力對支撐點所產生的力矩方向為  $-x$  方向，而在時間  $t$  時，陀螺自轉的角動量方向為  $+y$  方向，而在下一時刻  $(\Delta t)$  後陀螺自轉角動量的方向與其之差必須與力矩  $(-x)$  方向相同，因次我們可以得知在單位時間中陀螺的自轉角動量方向將由  $+y$  方向在  $-xy$  平面上逐漸偏  $-x$  方向。根據此原理，陀螺儀便依序一定方向(順時或逆時針)會產生進動。

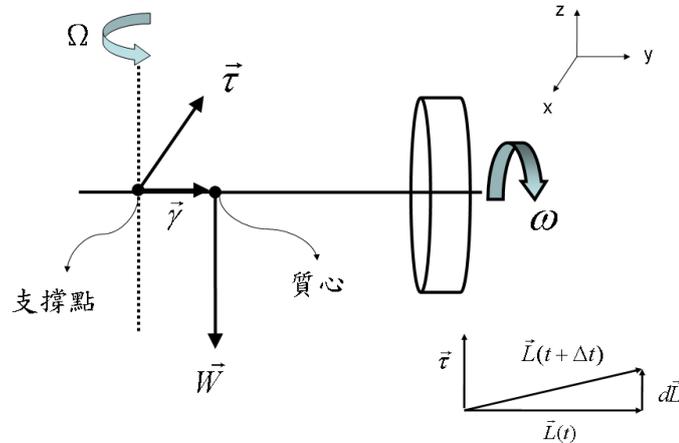


圖 4

在實驗中，我們可以利用陀螺的轉動角動量以及陀螺儀的進動角速度來求得陀螺的轉動慣量，如圖 5 所示：

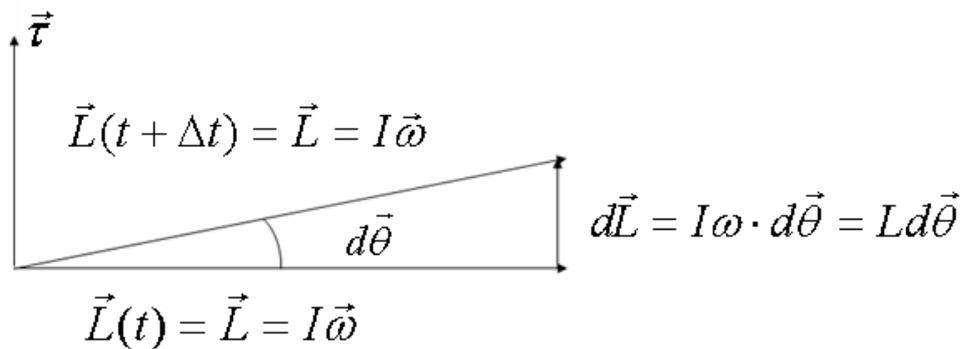


圖 5

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

$$d\vec{L} = I\omega \cdot d\theta = Ld\theta$$

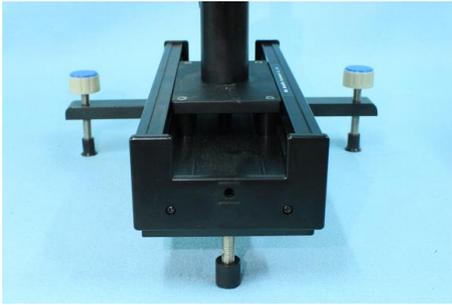
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = I\omega \cdot \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow I\omega \cdot \vec{\Omega} = \vec{\tau}$$

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{\tau}}{I\omega}$$

在力矩不變的時候，進動的角速度與陀螺自轉的角速度成反比的關係，也就是說陀螺旋轉的速度越慢，進動旋轉的角速度越快；如同打陀螺一般，在陀螺旋轉將要停下前，陀螺會不穩定的產生進動，而且進動的速度越來越快直到陀螺完全停止。

#### 四、實驗步驟

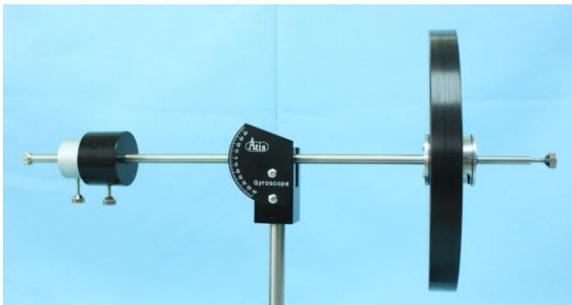
##### A 組裝步驟：



4-1. 陀螺儀放置于桌面利用三點式調整腳，調整後端兩點高度達到水平平衡。



4-2. 並以水平儀檢測。



4-3. 調整平衡砝碼，大小靠在一起移動，再調整小的平衡砝碼。



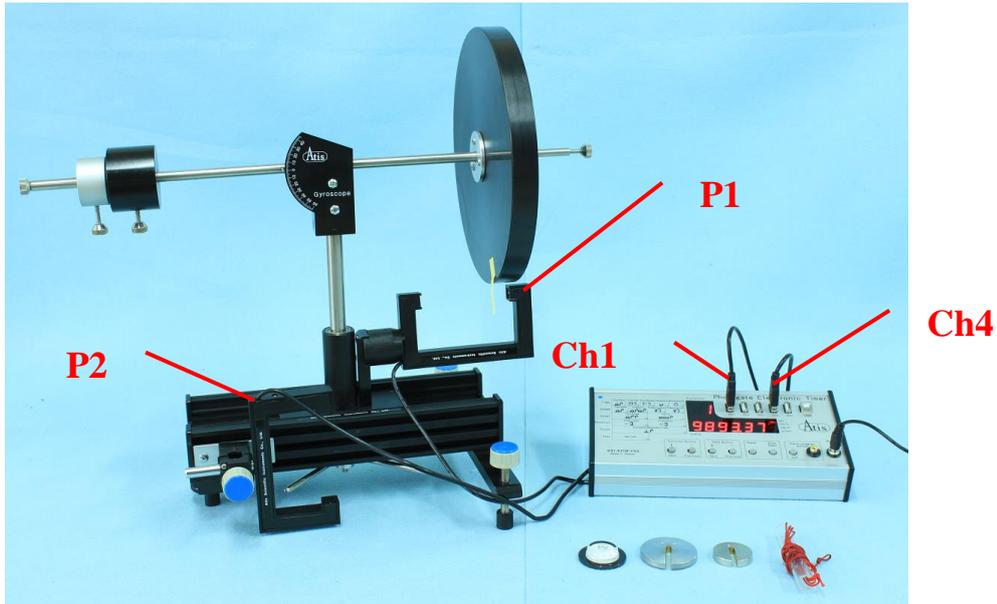
4-4. 放手後，陀螺儀平衡桿呈水平狀態。



4-5. 插上光電閘(搭配 3.7cm 鐵柱)可快速吸入磁性接頭中，並在轉盤內側邊緣貼上便利貼，做為光遮訊號，連接訊號通 Ch1。

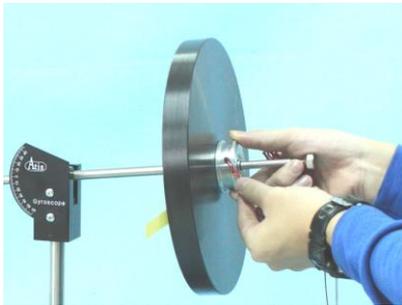


4-6. 在底座側邊接上光電閘，如圖中可使遮光棒順利通過。連接訊號通 Ch4。



4-7.光電閘分別與訊號插孔連接如圖，運動擷取器接上電源。組裝完成如圖。

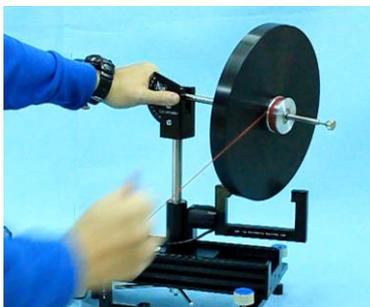
### B.操作步驟



4-8.細繩前端扣住插銷，便可纏繞。



4-9.依序將細繩纏繞於轉盤上的溝槽中。



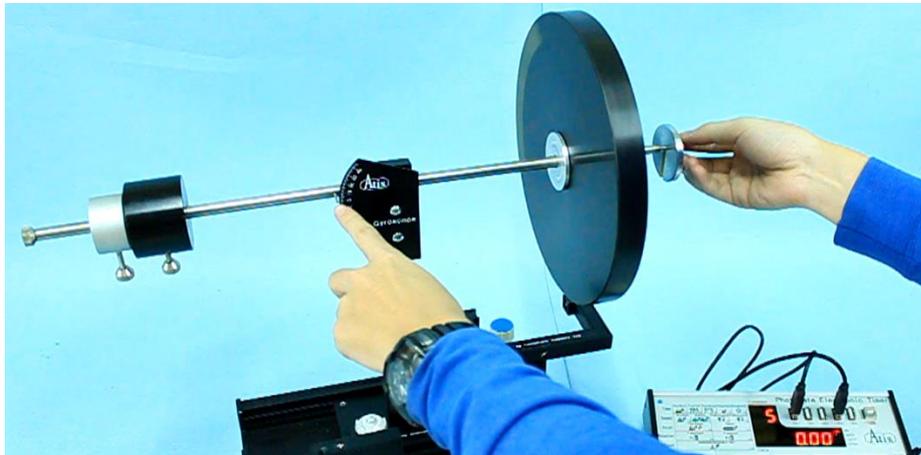
4-10.一手穩住陀螺儀一手速速的拉起細繩，陀螺儀將會快速的轉動起。

**4-11.** 不要觸碰陀螺儀轉盤，穩住平衡杆，便可根據使用者想要的角度而”定向”，這便是陀螺儀的特性之一。此時以雙手抓住底座，試著拿起移動或稍微旋轉，可以發現陀螺儀永遠指向某一方。



4-12.運動資料擷取器設定 F1，光電閘連接 Ch1。

確認陀螺儀轉盤轉動中時，遮光片順利經過直立的 P1 光電閘，顯示器可以看到轉盤週期。倒平 P1 光電閘，並記錄下週期時間。先做下一步驟，再來根據實驗紀錄表計算轉盤角速度。



4-13.運動資料擷取器設定為 F5，第二支光電閘連接 Ch4。

將加重砝碼放置於陀螺儀平衡桿的轉盤前端。確認水平並釋放。觀察陀螺儀運動行為，並記錄下進動週期時間而計算出進動率(角速度)。

**注意：進動週期的測量，是根據底座劃分為 1/4 圈、1/2 圈、1 圈的週期。**

4-14.重複上述 4-12 和 4-13 步驟，紀錄數個實驗紀錄做平均計算。

根據實驗紀錄表紀錄：

- 4-14-1.測量外加砝碼與支撐點的距離。
- 4-14-2.計算外加砝碼所造成的淨力矩大小。
- 4-14-3.測量陀螺的品質與其半徑，並計算理論轉動慣量值。
- 4-14-4.論值計算其誤差值。

4-15.延續實驗，可改變加重砝碼，觀察實驗結果。

4-16.觀察釋放時，給予順向力、逆向力、靜止釋放後的運動行為。

圖 7

### 五、 實驗結果與資料分析

在實驗中如下圖 5-1，利用陀螺自轉角速度  $\omega$  以及陀螺儀的進動率  $\Omega$ ，來求得陀螺的實驗轉動慣量  $I_e$ 。

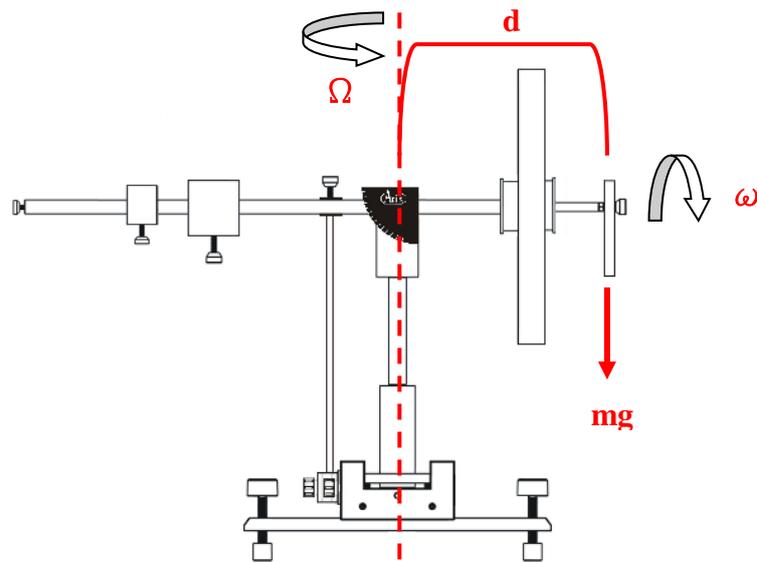


圖 5-1 陀螺儀示意圖

$$I_e = \frac{mgd}{\Omega\omega}$$

$I_e$ ：陀螺的轉動慣量； $m$ ：外加砝碼的重量； $g$ ：重力加速度； $d$ ：外加砝碼與中心支軸的距離

計算轉盤的理論轉動慣量						
陀螺儀轉盤			陀螺儀鋁合金介子			轉動慣量
外徑(m)	內徑(m)	重量(kg)	外徑(m)	內徑(m)	重量(kg)	(kg·m <sup>2</sup> )

### 實驗紀錄與量測結果

釋放行為：

外加砝碼重	外加砝碼離支撐軸距離	陀螺儀進動週期路徑	陀螺儀進動週期	陀螺儀進動角速度 $\Omega$	轉盤自旋週期	轉盤自旋角速度 $\omega$	轉動慣量 $I_e$	誤差值
kg	m	rad	ms	rad/s	ms	rad/s	kg·m <sup>2</sup>	%