轉動慣量實驗

一、實驗目的

測量轉輪受力矩而產生的角速度及角加速度的大小，以驗證剛體繞固定轉軸轉動之下的牛頓運動定律及其他轉動的物理量。其方法主要由一外力矩使轉輪產生轉動在尤其產生的角速度或角加速度來求得其他轉動的物理量。

二、實驗原理

首先當一物體再繞著圓點 O 點作轉動，此轉動得在 t_1 時的角位置爲 θ_1，在 t_2 時的位置爲 θ_2 此時定義物體的平均角速度(average angular velocity)爲

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\text{單位角位移量}}{\text{單位時間}}$$

所以角速度我們可寫成:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (\text{rad/s} \quad \text{or} \quad \text{rev/s})$$

同理，若再 t_1 時有角速度 ω_1，t_2 時有角速度 ω_2，則有平均角加速度(average angular acceleration)

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

所以角加速度可以寫成

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \qquad (\text{rad}/s^2 \quad \text{or} \quad \text{rev}/s^2)$$

而我們由動能是所有剛體的集合而來可得

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \ldots = \sum_i \frac{1}{2}m_iv_i^2$$

又由 $v = r\omega$，代入上式:

$$K = \sum_i \frac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2 = \frac{1}{2}(\sum m_ir_i^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

在此，我們定義轉動慣量(moment of inertia) I

$$I = \sum_i m_ir_i^2$$

單位一般爲 $kg \cdot m^2$，若質點爲連續體，則

$$I=\int r^2dm=\int \rho r^2 dV \qquad (其中\,\rho\,表示密度)$$

由力矩

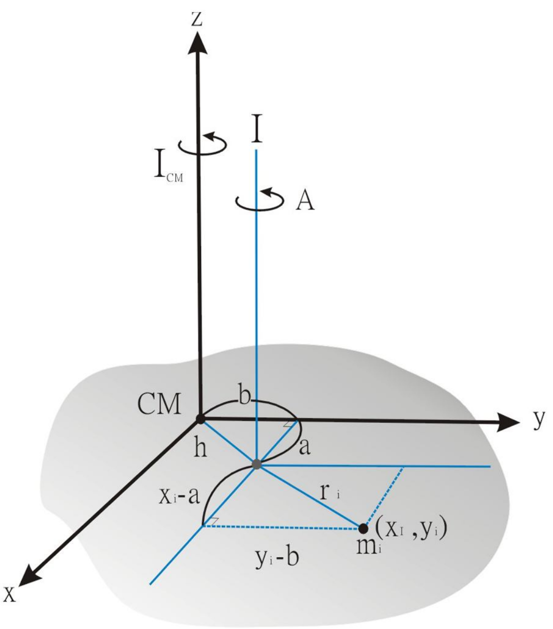
$$\tau=F_t r=m(\alpha r)r=(mr^2)\omega=I\alpha$$

補充：平行軸定理

若物體之總質量爲 M，對通過質心之軸的轉動慣量爲 I_{CM} ，而對另一平行軸的轉動慣量爲 I，且兩軸相距 h，則:

$$\underline{I=I_{CM}+Mh^2}$$

證明:



如圖設轉軸方向爲 z 軸方向，且以質心爲座標圓點($x_{CM}=y_{CM}=0$)，故質點 m_i 對 A 軸之轉動慣量爲:

$$I_i=m_ir_i^2=m_i[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]=m_i(x_i^2+y_i^2)+(a^2+b^2)m_i-2am_ix_i-2bm_iy_i$$

$$\therefore I=\sum I_i=\sum m_i(x_i^2+y_i^2)+(a^2+b^2)\sum m_i-2a\sum m_ix_i-2b\sum m_iy_i$$

後二項爲 0，Θ 由質心定義

$$\sum m_ix_i=Mx_{CM}=0$$
$$\sum m_iy_i=My_{CM}=0$$

且 $a^2+b^2=h^2$

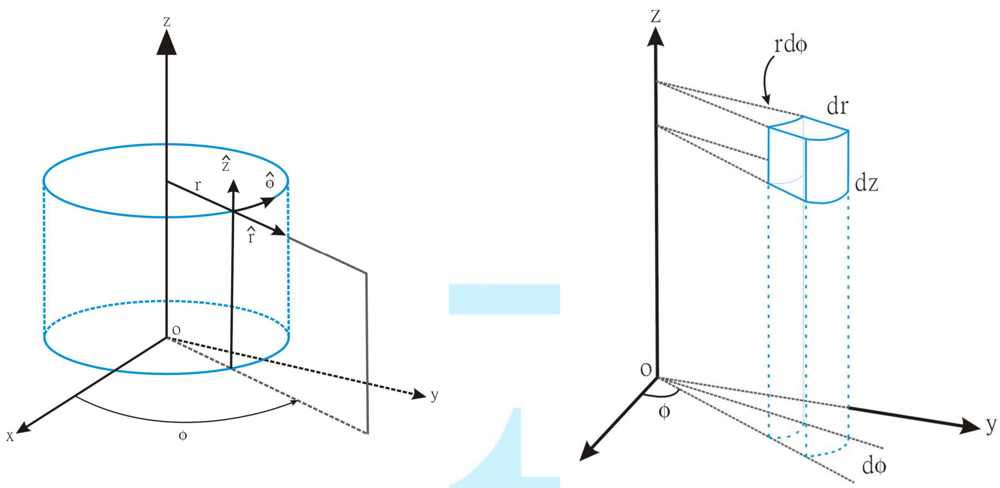
$$\therefore I=\sum m_i(x_i^{\ 2}+y_i^{\ 2})+(\sum m_i)h^2=I_{CM}+Mh^2$$ Q.E.D

轉動慣量 I 的推導:

先補充計算轉動慣量所需要用到的座標關係，如下:

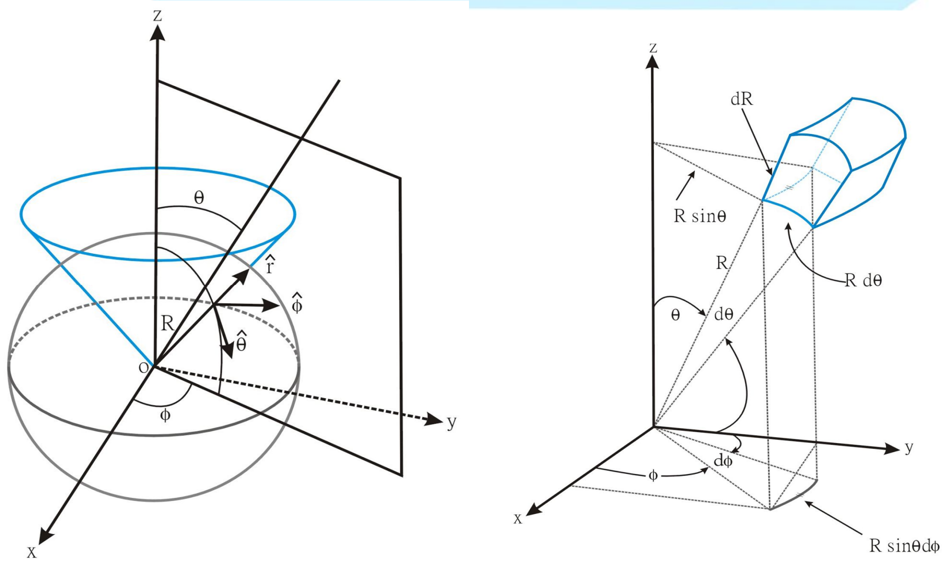
圓柱座標:

$$x=r\cos\phi \qquad y=r\sin\phi \qquad z=z \qquad dv=rdrd\phi dz$$

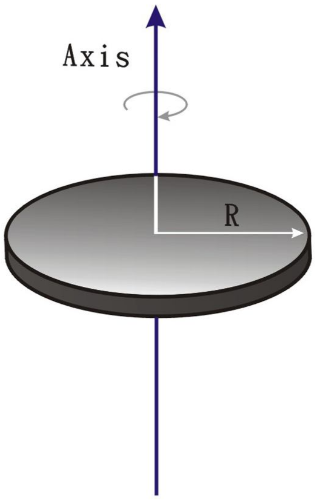


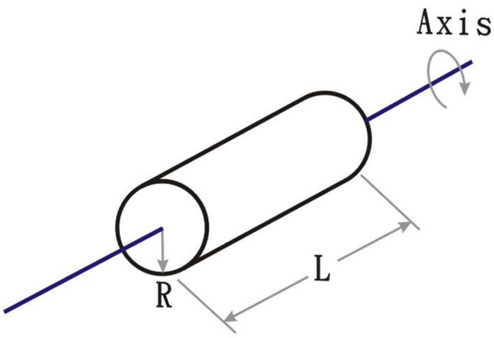
圓球座標:

$$x=R\sin\theta\cos\phi \qquad y=R\sin\theta\sin\phi \qquad z=R\cos\theta \qquad dv=R^2\sin\theta dRd\phi d\theta$$



1. 圓盤或圓柱體: I=$\frac{1}{2}MR^2$





假設圓柱體的極小體積如上兩圖，所以

$$dv = rdrd\phi dz$$

假設體密度為ρ ，所以 dm 為

$$\mathrm{dm} = \rho dv = \rho rdrd\phi dz$$

所以

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dv = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^l dz = \rho \frac{R^4}{4}(2\pi)l = \frac{1}{2}\rho\pi l R^4$$

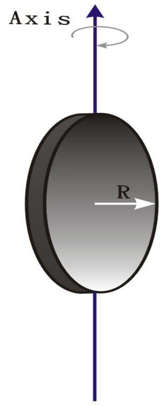
又

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 l}$$

所以:

$$I = \frac{1}{2}\rho\pi l R^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{\pi R^2 l}\right)\pi l R^4$$
$$= \frac{1}{2}MR^2$$

所以不管圓盤圓柱，I 皆跟柱體高無關。

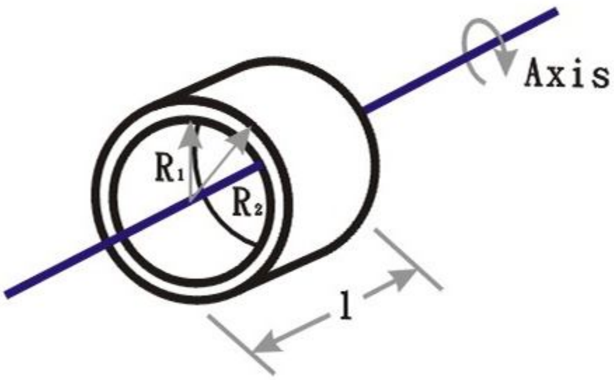


另外，假設如上圖，改變轉軸的位置則圓盤的轉動慣量爲:

$$I=\int r^2dm=\int (r\sin\phi)^2\rho rdrd\phi dz=\rho\int_0^R r^3dr\int_0^{2\pi}\sin^2\phi d\phi\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}dz=\frac{M}{\pi R^2 d}\cdot\frac{R^4}{4}\cdot\pi\cdot d$$

$$=\frac{1}{4}MR^2$$

2. 環狀圓柱: $\quad I=\frac{1}{2}M(R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2})$



同上之式子，假如積分式中 r 項的上下限改爲:

$$I=\int r^2dm=\rho\int_{R_1}^{R_2} r^3dr\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^l dz=\frac{1}{2}\rho\pi l(R_2^{\ 4}-R_1^{\ 4})$$

又

$$\rho=\frac{M}{\pi(R_2^{\ 2}-R_1^{\ 2})l}$$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\frac{M}{\pi(R_2^{\ 2} - R_1^{\ 2})l}\pi l(R_2^{\ 4} - R_1^{\ 4})$$

又

$$\frac{(R_2^{\ 4} - R_1^{\ 4})}{(R_2^{\ 2} - R_1^{\ 2})} = \frac{(R_2^{\ 2} + R_1^{\ 2})(R_2^{\ 2} - R_1^{\ 2})}{(R_2^{\ 2} - R_1^{\ 2})}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}M(R_1^{\ 2} + R_2^{\ 2})$$

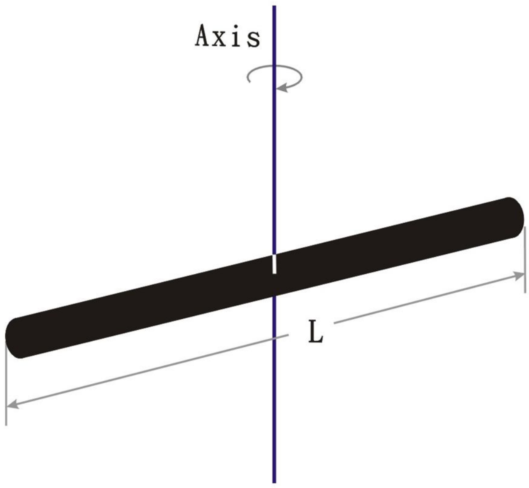
3.圓柱

(ⅰ) 假設柱體半徑可以忽略且密度均勻。設 $\lambda = \dfrac{M}{L}$ 爲柱體密度，假設棍子位於 x 處，則:

$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L}dx$$

$$I = \int x^2 dm = \int x^2 \lambda dx$$

又可因轉動的圓心位置(或轉軸的位置)而有不同的結果。

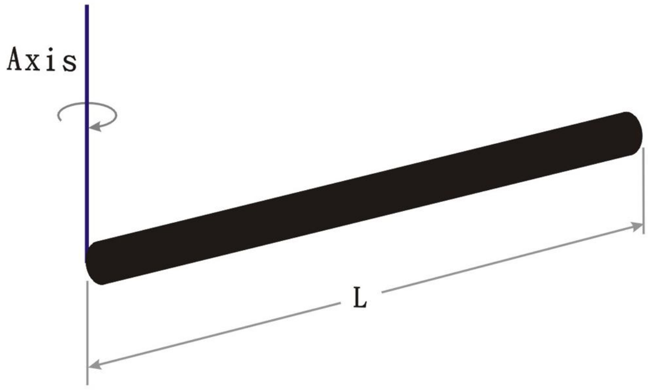


如在軸中心(如上圖):

$$I = \int x^2 dm = \int x^2 \lambda dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \lambda dx = 2\int_0^{\frac{L}{2}} x^2 \lambda dx = 2\frac{M}{L}\frac{(L/2)^3}{3}$$

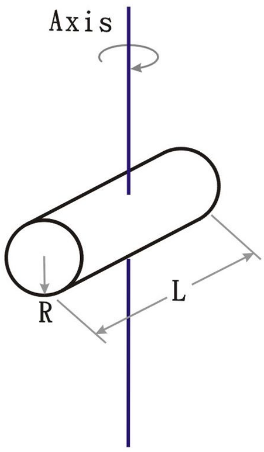
$$= \frac{1}{12}ML^2$$

如在邊端:



$$I=\int x^2dm=\int x^2\lambda dx=\int_0^L x^2\lambda dx=\frac{1}{3}L^3(\frac{M}{L})$$
$$=\frac{1}{3}ML^2$$

(ⅱ)假設柱體半徑不可忽略且密度均勻。在此我們僅討論在圓柱中心橫躺著轉動的情形。



我們將圓柱切成一片片極小的圓盤，且每片圓盤質量爲 dm，我們以繞著圓盤的直徑爲轉軸時，其轉動慣量在上面已算過，爲$I=\frac{1}{4}MR^2$，再由平行軸定理可知:

$$I=\int dI=\int d(I_{CM}+Mh^2)=\int dI_{CM}+\int dm\cdot dh^2$$

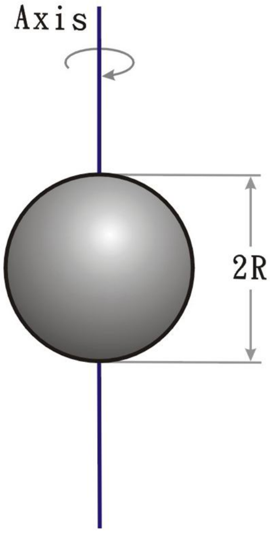
我們可由上圖得知$I=I_{CM}=\frac{1}{4}MR^2$，而平行軸中的$\int dm\cdot dh^2$項等於上面推導過的在軸中心的圓柱體(半徑忽略)的計算，所以:

$$I=\int dI_{CM}+\int dm\cdot dh^2=\int d(\frac{1}{4}MR^2)+\int x^2dm=\frac{1}{4}MR^2+\frac{1}{12}ML^2$$

其中 R 爲圓柱半徑，L 爲圓柱長度。

4. 球型體(分實心和空心)

(i)實心球體



首先，先帶入球座標(r,θ,ϕ)的觀念，如上圖，可知: $dv=r^2\sin\theta drd\theta d\phi$

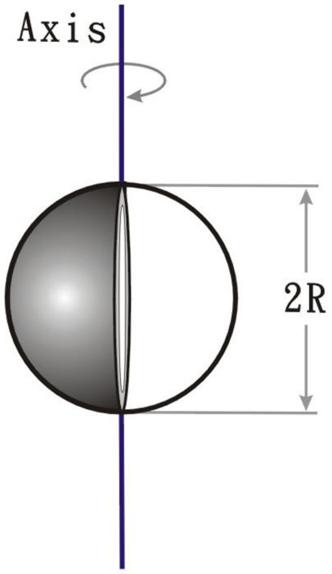
假設體密度爲$\rho=\frac{M}{V}=\frac{\int dm}{\int dv}=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$，又 dm 與 z 軸的距離爲$r\sin\theta$，所以:

$$I_z=\int(r\sin\theta)^2dm=\iiint r^2\sin^2\theta\cdot\rho r^2\sin\theta drd\theta d\phi=\rho\int_0^R r^4dr\int_0^\pi\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi$$

$$=\rho\cdot\frac{R^5}{5}\cdot 2\pi\cdot\frac{4}{3}=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{8}{15}\pi R^5$$

$$=\frac{2}{5}MR^2$$

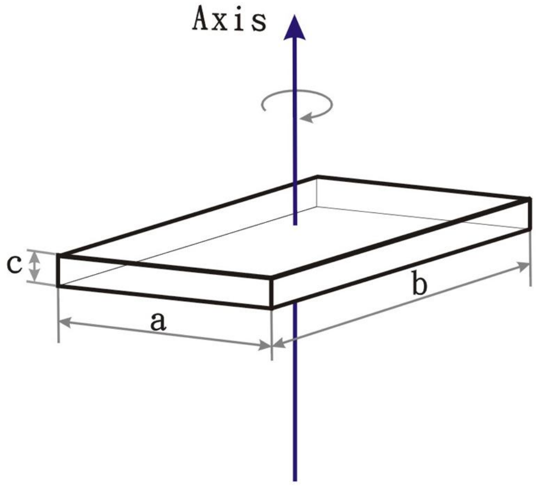
(ⅱ)空心球殼



同上，在此我們假設其表面積密度爲$\sigma=\dfrac{M}{S}=\dfrac{dm}{ds}=\dfrac{M}{4\pi R^2}$

$$I_z=\int(r\sin\theta)^2dm=\iint r^2\sin^2\theta\cdot\sigma R^2\sin\theta d\theta d\phi=\sigma R^4\int_0^\pi\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi$$
$$=\frac{M}{4\pi R^2}\cdot R^4\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\pi=\frac{2}{3}MR^2$$

5.矩形板



$$dv = dxdydz$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

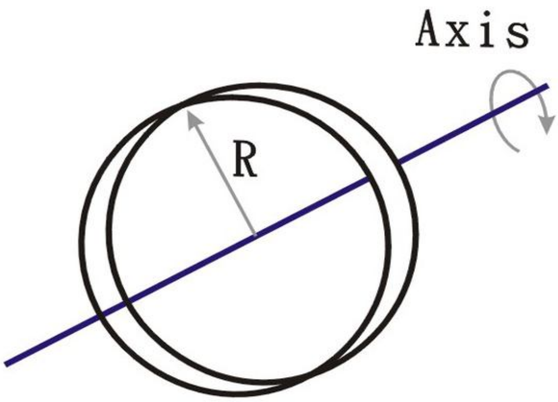
$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2) \rho dxdydz = \frac{1}{12} \rho (a^3 b + ab^3) c$$

$$= \frac{1}{12} \rho abc (a^2 + b^2)$$

$$\rho = \frac{M}{abc}$$

$$\therefore I_z = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

6.其他，如下圖爲一薄圓環:

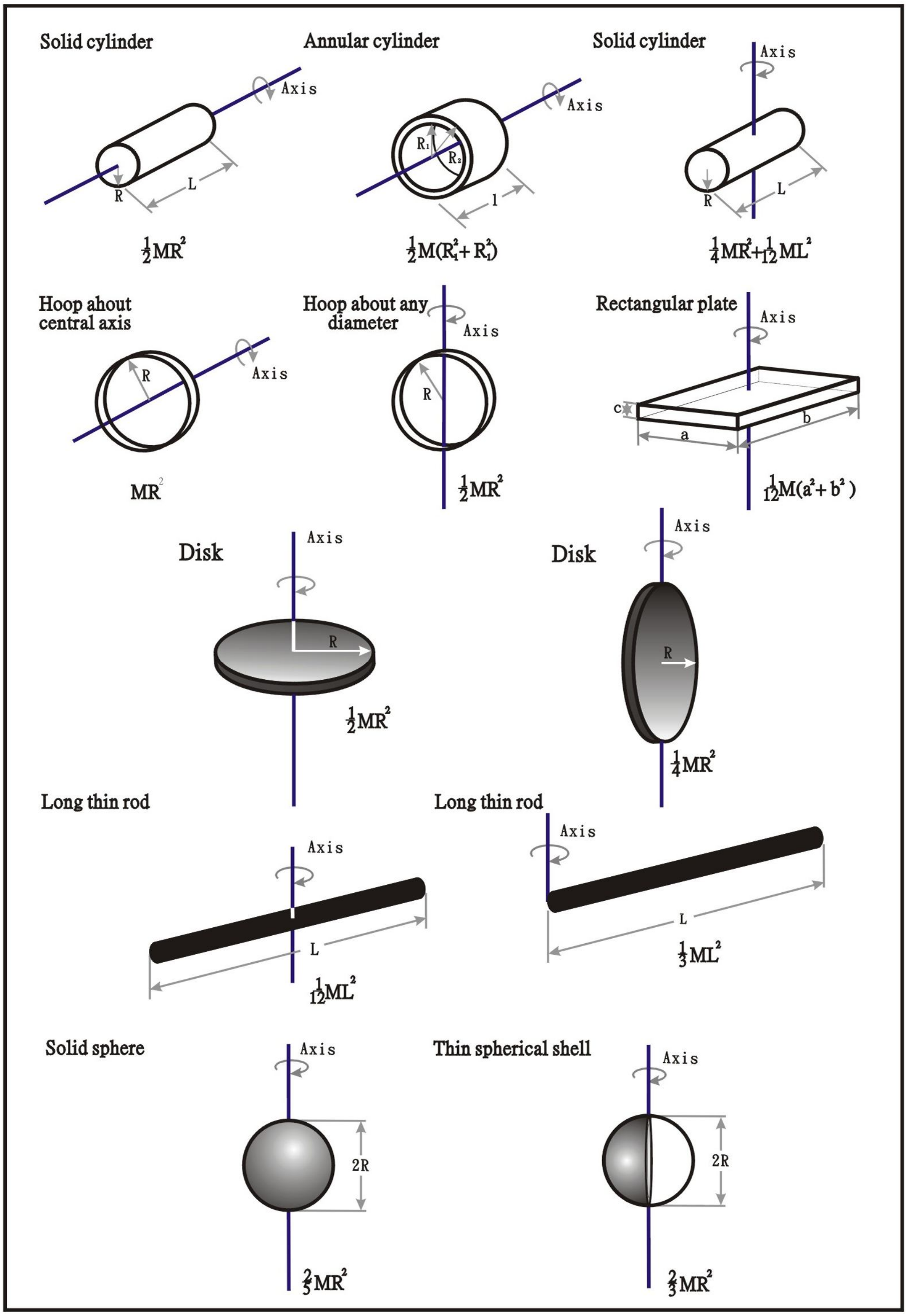


由圖可知:

$$I = \int R^2 dm = \int (R \sin \phi)^2 \sigma R d\phi dz = \sigma R^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dz$$

$$= \frac{M}{2\pi R d} R^3 \cdot \pi \cdot d$$

$$= \frac{1}{2} M R^2$$



Solid cylinder
Axis
R
L
$\frac{1}{2}MR^2$
Annular cylinder
Axis
R_1
R_2
l
$\frac{1}{2}M(R_1^2+R_2^2)$
Solid cylinder
Axis
R
L
$\frac{1}{4}MR^2+\frac{1}{12}ML^2$
Hoop ahout central axis
Axis
R
MR^2
Hoop about any diameter
Axis
R
$\frac{1}{2}MR^2$
Rectangular plate
Axis
c
a
b
$\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$
Disk
Axis
R
$\frac{1}{2}MR^2$
Disk
Axis
R
$\frac{1}{4}MR^2$
Long thin rod
Axis
L
$\frac{1}{12}ML^2$
Long thin rod
Axis
L
$\frac{1}{3}ML^2$
Solid sphere
Axis
2R
$\frac{2}{5}MR^2$
Thin spherical shell
Axis
2R
$\frac{2}{3}MR^2$

圖(一) 轉動慣量整合表圖

※ 實驗原理分析:如下圖(二)

$$mg - T = ma$$

$$a = r\alpha$$

$$\tau = I\alpha = Tr$$

$$\Rightarrow I = mr^2(\frac{g}{a} - 1)$$

如考慮摩擦力 f:

$$(mg - f - m\alpha r)r = I\alpha$$

$$\Rightarrow I = mr^2(\frac{g}{a} - \frac{f}{a} - 1)$$

在此我們假設忽略摩擦力，且:

$$I = I' - I_0$$

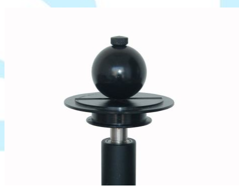
三、實驗儀器:

轉動慣量實驗儀器列表					
編號	儀器名稱	數量	編號	儀器名稱	數量
1	實驗台座	1	2	T 型支架	1
3	可移動接頭	1	4	可移動支架接頭	1
5	附柄滑輪	1	6	待測物體組	1
6.a	轉動圓盤	1	6.b	薄殼圓環	1
6.c	環狀圓柱	1	6.d	薄殼圓球	1
6.e	實心圓球	1	6.f	圓柱	1
6.g	細圓棒	1	6.h	長方體	1
6.i	兩端置重物	1	6.j	圓盤固定器	1
6.k	空心圓球固定器	1	6.l	實心圓球固定器	1
7	10 格格柵	1	8	砝碼組	1
9	落體固定架	1	10	光電閘感應器	選購
11	運動實驗數據擷取器	選購	12	水平儀	1

轉動慣量實驗儀器對照圖

實驗組裝附圖(a)

實驗組裝附圖(b)

待測儀器組裝示意圖			
			
平放圓盤	空心圓柱	細圓棒	圓柱
			
長方體	薄殼圓球	薄殼圓環	實心圓球
			
直立圓盤	兩端置重物	細棒端爲中心點	平行軸定理

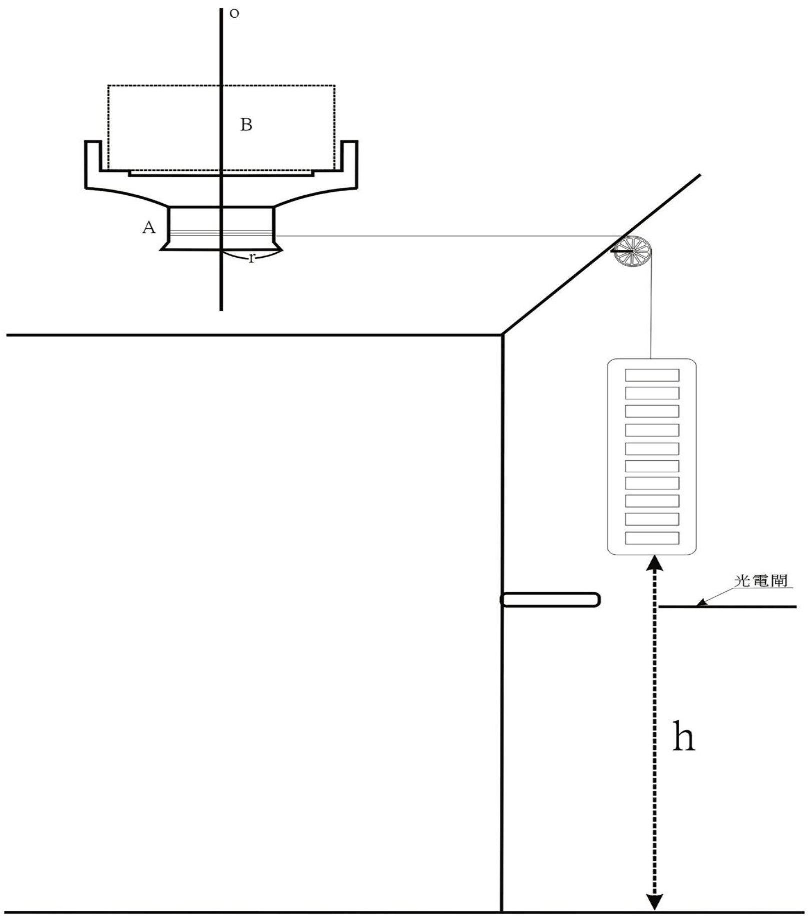
實驗組裝附圖(c)

四、實驗步驟:

1. 如上實驗組裝附圖(a)(b)(c)。
2. 先用游標尺測量旋轉台繞線部之直徑並除二算出半徑紀錄之。
3. 測量 10 格柵鐵片的質量及離地高度並紀錄之。
4. 利用 10 格柵鐵片測量加速度 a 值並平均紀錄之再帶入下面式子求 I，如下:

$$I = mr^2\left(\frac{g}{a} - 1\right)$$

5. 加上不同待測物於旋轉台上，如圓盤、圓柱體、圓球…等，再依上述步驟測量 a 值並帶入上述式子求出 I 值。
6. 與 I 的理論值做比較並算出誤差再紀錄之。
7. 再加重砝碼的重量並重複上述的 3~5 的實驗步驟並紀錄之。



圖(二) 實驗原理解析圖

*注意在繞繩子時要儘量不要重疊並接近旋轉台底部，另格柵離的的高度也可藉由旋轉台的半徑去計算，如下:先剪裁繩子長度剛好可讓格柵著地，在纏繞繩子在旋轉台上，如繩子繞 4 圈就是 ”2x3.14x半徑” 就等於是高度，就是以格柵的底部到地面的距離，依此類推。此外，我們所量測到的 a 值乃一平均值。